теңсіздігін алып, оны жоғарыдағы теңсіздікке қойсақ,

$$k^m \left(|a_k| + |b_k|\right) \le \frac{1}{2}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2 + \frac{2}{k^2}\right)$$

теңсіздікке келеміз.

Сонда

$$\frac{\left|a_0^{(m+1)}\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{(m+1)}(x))^2 dx$$

Бессель теңсіздігі мен $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ қатары жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty}k^m(|a_k| + |b_k|)$ қатарының жинақтылығы, ал одан (48) қатар жинақтылығы шығады. Теорема дәлелденді.

1-Ескерту. Егер бұл теореманың шарттары m>0 үшін орындалған болса, онда $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарын мүшелеп m рет дифференциалдауға болады, яғни

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)^{(s)}, \quad 1 \le s \le m, -\pi \le x \le \pi \qquad (51)$$

теңдігі орынды, өйткені бұларды мажорлайтын

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^s(|a_k| + |b_k|), \ 1 \le s \le m,$$

қатарлары жинақты.

2-Ескерту. Бұл теореманың дәлелдеуі Фурье қатарының жинақталу жылдамдығының бағасын беруге мүмкіндік береді, яғни Фурье тригонометриялық қатарының қосындысын оның дербес қосындысымен ауыстырғанда кететін қате бағалауын беруге болады. Сонымен, теорема шарттарының орындалуында (50) теңдік қосындысы үшін Коши – Буняковский теңсіздігін, $f^{(m+1)}(x)$ функциясының Фурье еселеуіштері үшін Бессель теңсіздігін және

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}} \le \int_{k_0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2m+2}}$$

айқын бағалауын пайдаланып,

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \le \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right) \le \sqrt{\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}}}\sqrt{2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2\right)} \le$$

$$\le \left(\int_{k_0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2m+2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m+1)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(2m+1)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m+1)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}}\right)$$

бағалауын аламыз.

№28 ДӘРІС. ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ АБСОЛЮТ ЖӘНЕ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУЫ.

Дәрістің мақсаты: Фурье қатарының абсолютті және бірқалыпты жинақталуын анықтайтын негізгі екі лемма мен екі теореманы меңгеру.

Фурье тригонометриялық қатарының бірқалыпты жинақтылық шарты

Егер $f(x)$ функциясы [-π, π] кесіндісінде үзіліссіз, ал оның $f'(x)$ туындысы осы кесіндіде құрама-үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясы [a, b] кесіндісінде құрама жатық деп аталады.

1-Теорема. Егер [-π, π] кесіндісінде құрама-жатық $f(x)$ функциясы f(-π)=f(π) шартын қанағаттандырса, онда оның

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx \qquad (41)$$

Фурье тригонометриялық қатары бұл кесіндіде бірқалыпты жинақты және [-π, π] кесіндісінің әрбір нүктесінде S(x)=f(x).

Дәлелдеу. (41) қатардың бірқалыпты жинақтылығын дәлелдеу үшін оны мажорлайтын

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right) \qquad (42)$$

сандық қатарының жинақтылығын дәлелдеу жеткілікті , ал соңғы қатар жинақтылығы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right)$$

қатарының жинақтылығымен бара-бар.

Егер біз $f'(x)$ туындысының Фурье еселеуіштерін

$$a_k{}'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx dx\ , \quad b_k{}'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx$$

арқылы белгілеп, $f(x)$ функциясының Фурье еселеуіштерін бөліктеп интегралдасақ, онда

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi k} f(x)\sin kx\ \Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx=-\frac{b_k{}'}{k}\ ,$$

және дәл осылай $b_k=\frac{a_k{}'}{k}$ екенін анықтаймыз. Сондықтан,

$$|a_k|+|b_k|\le\left(\frac{|a_k{}'|}{k}+\frac{|b_k{}'|}{k}\right) \qquad (43)$$

Ал $f'(x)$ туындысы [-π, π] кесіндісінде құрама-үзіліссіз болғандықтан,

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'^2+b_k'^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)dx$$

Бессель теңсіздігі орындалады, демек,

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'^2+b_k'^2) \qquad (44)$$

сандық қатары жинақты.

Енді

$$0\le\left(\left|a_k'\right|-\frac{1}{k}\right)^2=a_k'^2-2\frac{\left|a_k'\right|}{k}+\frac{1}{k^2}\ ,\qquad 0\le\left(\left|b_k'\right|-\frac{1}{k}\right)^2=b_k'^2-2\frac{\left|b_k'\right|}{k}+\frac{1}{k^2}$$

теңсіздіктерінен

$$\frac{\left|a_k'\right|}{k}\le\frac{1}{2}\left(a_k'^2+\frac{1}{k^2}\right)\ ,\qquad \frac{\left|b_k'\right|}{k}\le\frac{1}{2}\left(b_k'^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

теңсіздігін, ал одан

$$\frac{\left|a_k'\right|}{k}+\frac{\left|b_k'\right|}{k}\le\frac{1}{2}\left(a_k'^2+b_k'^2\right)+\frac{1}{k^2} \qquad (45)$$

теңсіздігін аламыз.

Сонда (44) қатар мен $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ қатарларының жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(a_k'^2+b_k'^2\right)+\frac{1}{k^2}\right\}$ қатарының жинақтылығын ал (45) және (43) теңсіздіктерінен $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарын мажорлайтын (42) қатар жинақтылығын дәлелдейміз. Мұнан $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарының өзінің S(x) қосындысына бүкіл x өсінде бірқалыпты жинақты екенін, ал [-π, π] кесіндісінде 5-тұжырым бойынша дәл $f(x)$ функциясына жинақталатынын көреміз. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Егер $f(x)$ функциясы [-π, π] кесіндісінде үзіліссіз және оның ұштарында мәндері тең болса, онда оны 2π периодты созуда бүкіл x өсінде үзіліссіз функция аламыз.

$f(x)$ функциясын бүкіл x өсінде құрама-жатық деп атаймыз, егер ол x өсінің әрбір ақырлы кесіндісінде құрама-жатық болса. Осыған байланысты жоғарыдағы теореманы былай айтуға болады:

Егер периоды 2π периодты $f(x)$ функциясын бүкіл x өсінде құрама-жатық болса, онда оның (41) Фурье тригонометриялық қатары оған бүкіл өсте бірқалыпты жинақты.

Фурье тригонометриялық қатары жинақтылығын жақсарту

Кейбір Фурье тригонометриялық қатарының жинақталуы өте жай болуы мүмкін, сондықтан қосындысының тыңғылықты тұйық өрнегін табу қиын тіпті белгісіз болуы да мүмкін. Осыған байланысты мынадай мәселе: жай жинақталатын

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \ , -\pi \le x \le \pi \qquad \text{(А)}$$

Фурье тригонометриялық қатарынан қосындысы $\varphi(x)$ болатын белгілі жәй жинақталатын Фурье қатарын бөліп алып, ал қалған қатарды

$$f(x) - \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \qquad \text{(Б)}$$

жеткілікті жылдам жинақты етіп алуға, яғни $\alpha_к$, $\beta_к$ еселеуіштері к шексіздікке ұмтылғанда нөлге жылдам ұмтылатындай етіп алуға болама? Егер мұндай мүмкіндік туса, онда $f(x)$ функциясының (А) өрнектеуінен (Б) өрнектеуіне көшуді (А) қатарының жинақталуын жақсарту деп айтады.

Егер $f(x)$ функциясының ерекшеліктері бар болса (шектік мәндері мен туындыларының $x=\pm\pi$ жеке үзіліс нүктелерінде), онда жинақтылықты жақсартуға $f(x)$ функциясынан жеткілікті қарапайым және ерекшеліктері оның ерекшеліктерімен бірдей $\varphi(x)$ функциясын шегеріп, қол жеткізуге болады.

Мысалы, $f(x) \in C'[-\pi, \pi]$ және $\lim\limits_{x\to\pm\pi} f(x) = \pm\pi$ болсын. Кесінді ұштарында әртүрлі мән қабылданғандықтан (А) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты болмайды. Сондықтан, егер $\varphi(x) = x$ деп алсақ, онда $\varphi(x) \in C'[-\pi, \pi]$ және $\lim\limits_{x\to\pm\pi} \varphi(x) = \pm\pi$. Сонда $f(x) - x \in C'[-\pi, \pi]$ және кесінді ұштарында бірдей мән қабылдайды, демек, (5) қатары бірқалыпты жинақты.

Тағы да бір А.Н.Крылов әдісі деп аталатын қатар жинақтылығын жақсарту әдісін келтірейік. Бұл әдіс бойынша қатар берілген, бірақ оның қосындысы туралы ешқандай да ақпарат жоқ. Онда a_n, b_n еселеуіштерінен $\frac{1}{n}$ шамасының төменгі дәрежелерін шегеріп, осы шаманың төменгі дәрежелерін ұстайтын еселеуіштері бар қатарды қосындылауға тырысады және ол үшін жеткілікті жәй жинақталатын Фурье тригонометриялық қатарлар тәсілін пайдалануға болады. Мысалы,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 - 1} \sin nx \ , -\pi < x < \pi, \qquad (52)$$

қатарының жинақтылығын жақсарту керек болсын. Онда $\frac{n^3}{n^4-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5 - n}$ болғандықтан,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n} \ , \quad -\pi < x < \pi .$$

Ал $\quad x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi$

болғандықтан $\quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} + \sin x, \quad -\pi < x < \pi ,$

демек, $$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}, -\pi < x < \pi \qquad (53)$$

Мұнан (53) қатардың (52) қатарға қарағанда әлдеқайда жылдам жинақталатынын көреміз.

№29-30 ДӘРІС. ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫ, ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКС ТҮРІ. ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ.

Дәрістің мақсаты: Көмекші теңдіктерді қорытып шығару, ақырсыз аралық үшін Риман леммасын дәлелдеу. Фурье интегралы ұғымын меңгеру, Фурьенің екі еселі интегралын, Фурье интегралының комплекс түрін меңгеру. Фурье түрлендірулерін, олардың қасиеттерін білу.

Егер периоды $2l$ периодты функция қарастырсақ, онда $[-l, l]$ кесіндісінде ортонормаланған негізгі тригонометриялық жүйе

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots \qquad (54)$$

арқылы, ал оның Фурье қатары

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\cos k\pi x}{l} + b_k \frac{\sin k\pi x}{l} \qquad (55)$$

түрінде және мұның Фурье коэффициенттері

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \qquad (56)$$

түрінде жазылар еді.

Енді $f(x)$ функциясының Фурье қатарына жіктелу $[-l, l]$ кесіндісін шексіз созсақ, яғни $l \to +\infty$ десек, онда Фурье қатары Фурье интегралына айналады.

Сонымен, айталық, $f(x)$ функциясы бүкіл сан өсінде берілген және $[-l, l]$ ақырлы кесіндіде құрама-жатық болсын. Онда (55), (56) формулалар орынды, егер x нүктесі $[-l, l]$ кесіндісінің ішкі нүктесі және ол нүктеде $f(x)$үзіліссіз болса, ал егер ол ішкі нүктеде $f(x)$ функциясы үзілісті болса, онда (55) формуланың сол жағына $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ деп қою керек.

Ал (56) еселеуіштері (55) теңдікке қойсақ,

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi - x)d\xi \qquad (57)$$

Сонымен бірге $f(x)$ бүкіл сан өсінде абсолютті интегралданатын болса, яғни